„MATEMATYKA 3D"

zbiór pomocy dydaktycznych do stereometrii
opracowany przez nauczycieli matematyki biorących udział w wyjeździe szkoleniowym
Toruń 2019

Spis treści

I. Programy, które można wykorzystać na zajęciach z geometrii:

1. GeoGebra

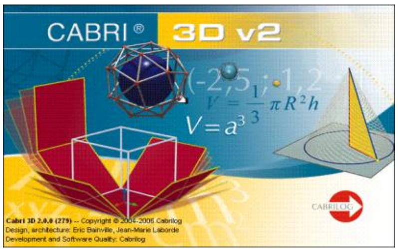
GeoGebra to darmowe oprogramowanie do wspomagania nauki matematyki dla uczniów szkół podstawowych, średnich oraz studentów. Posiada szereg narzędzi pomocnych w opanowaniu takich zagadnień jak geometria, algebra czy analiza matematyczna.https://www.geogebra.org/

2. Poly Pro

Program Poly to program shareware pozwala na oglądanie wielościanów wypukłych o foremnych ścianach w wersji z pełnymi ściankami (Poly) i szkieletowej (PolyPro). Bryły można obracać, rozkładać na siatki.
Po wydrukowaniu siatki i przeniesieniu jej na karton można własnoręcznie sklejać wybrane modele. Ponadto program PolyPro umożliwia eksportowanie rysunków i animacji do innych programów, zapisując je w postaci standardowych plików. http://www.peda.com/poly/

3. Program do rysowania w perspektywie regularnych brył prostych http://jkraus.pl/bryly.php

4. Grupa programów **płatnych** Cabri https://math-comp-educ.pl/programy-cabri/, w skład których wchodzi program Cabri 3D daje wyjątkowy program, który umożliwia uczniomrozwijanie umiejętności myślenia w 3D i kreatywności matematycznej.
https://cabri.com/en/student/cabri-3d/



5. Rhinoceros

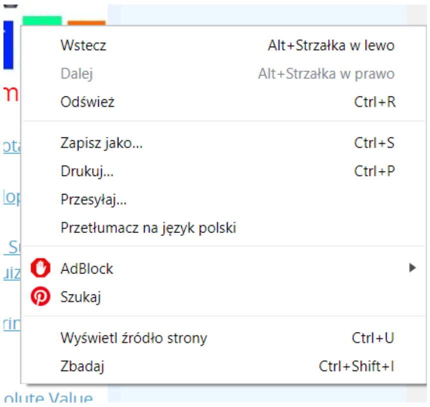
Rhinoceros, w skrócie nazywany "Rhino", jest w pełni profesjonalnym programem do modelowania 3d, który opiera się na geometrii NURBS*. – program płatny, posiada tańszą wersję dla edukacji.
Twórca programu daje możliwość wypróbowania programu przez 90 dni, poprzez zainstalowanie wersji demo https://www.rhino3d.com/download/rhino-for-windows/6/evaluation

Nazwa	Cena netto	Cena brutto
Rhino 6 * wsparcie gratis i rabat na szkolenia	3850 zł	4,735.50 zł
Rhino 6 upgrade * aktualizacja z wersji 1,2,3,4,5	2100 zł	2,583.00 zł
Rhino 6 EDU * dla studentów / uczniów / nauczycieli	810 zł	996.30 zł

Te i inne programy polecane na portalu:
http://matematyka.wroc.pl/polecamy/programy-komputerowe

II. Pomoce dydaktyczne online

- strony zagraniczne:
(przetłumaczyć stronę na język polski) – np. w Google Chrome



a) **Annenberg Learner** – zasoby dla nauczycieli
https://www.learner.org/interactives/geometry/prisms/

b) **Math is fun** strona przygotowana przez nauczyciela matematyki
https://www.mathsisfun.com/geometry/octahedron.html

c) **NCTM – Nacional Council of Teachers of Mathematics** – bryły geometryczne
https://www.nctm.org/Classroom-Resources/Illuminations/Interactives/Geometric-Solids/

- strony polskie:

a) **Epodręczniki** lekcja bryły w 3D - https://epodreczniki.pl/a/D1B0DZUtD

b) **Pi-stacja** głodni wiedzy – bryły
https://pistacja.tv/przedmioty/matematyka/gimnazjum/bryly

c) **DeltaMi**- portal popularnonaukowy miesięcznika **Delta**- matematyka, fizyka, informatyka, astronomia, nauki przyrodnicze.http://www.deltami.edu.pl/temat/matematyka/

d) **Nauczyciele matematyki** - Zależność między objętością ostrosłupa i graniastosłupa
https://www.facebook.com/NauczycieleMatematyki/videos/1316435311710322/?sfnsw=cl

e) **Nauczyciele matematyki** - Prostopadłościan - dynamiczne wymiary i siatka
https://www.facebook.com/NauczycieleMatematyki/posts/2143538423517942sfnsw=cl

f) **www. matematyka.wroc.pl** - strona Wydziału Matematyki na Uniwersytecie Wrocławskim - dużo wspaniałych ciekawostek, artykułów, zadań, matematyka wokół nas, galerie wielościanów,

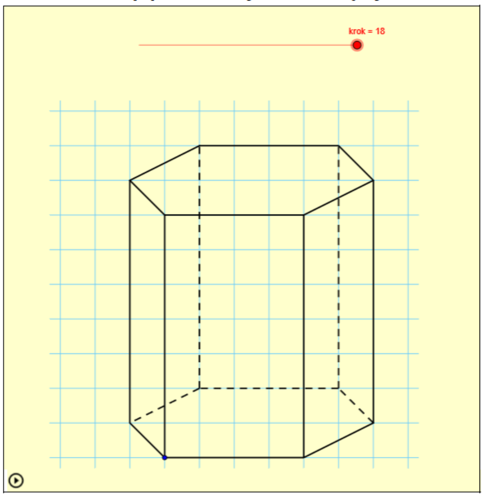
- gotowe prace do wykorzystania na lekcjach stereometrii

a) http://matematyka.wroc.pl/mat-swiat/odlotowe-figury
b) http://matematyka.wroc.pl/kacik-naukowy/kolko-matematyczne
c) http://matematyka.wroc.pl/book/rozmaitosci/galeria-modeli
d) http://matematyka.wroc.pl/ciekawieomatematyce/o-widzeniu-przestrzennym
e) http://matematyka.wroc.pl/matematykawsztuce/wieloscainy-wokol-nas
f) Konstrukcje w GeoGebrze - http://konstrukcjewgeogebrze.ugu.pl/

Wykorzystanie programu GeoGebra

1. Szkicowanie brył.
   https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Szkicowanie_bry%C5%82

Graniastosłup prawidłowy sześciokątny



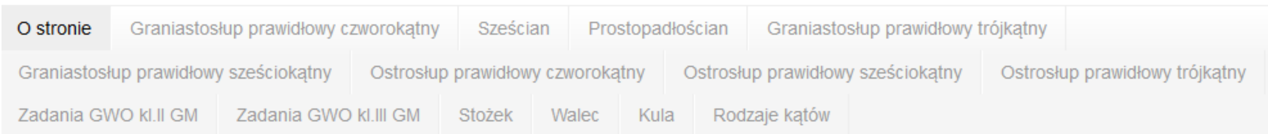
Przykładowe bryły do wyboru:

a) graniastosłup prawidłowy trójkątny,
b) graniastosłup prawidłowy czworokątny,
c) graniastosłup prawidłowy sześciokątny
d) ostrosłup prawidłowy trójkątny,
e) ostrosłup prawidłowy czworokątny,
f) ostrosłup prawidłowy sześciokątny.

2. Przedstawianie brył, uzupełnianie brył o podstawowe odcinki (np. przekątną), zaznaczanie przekroju bryły.

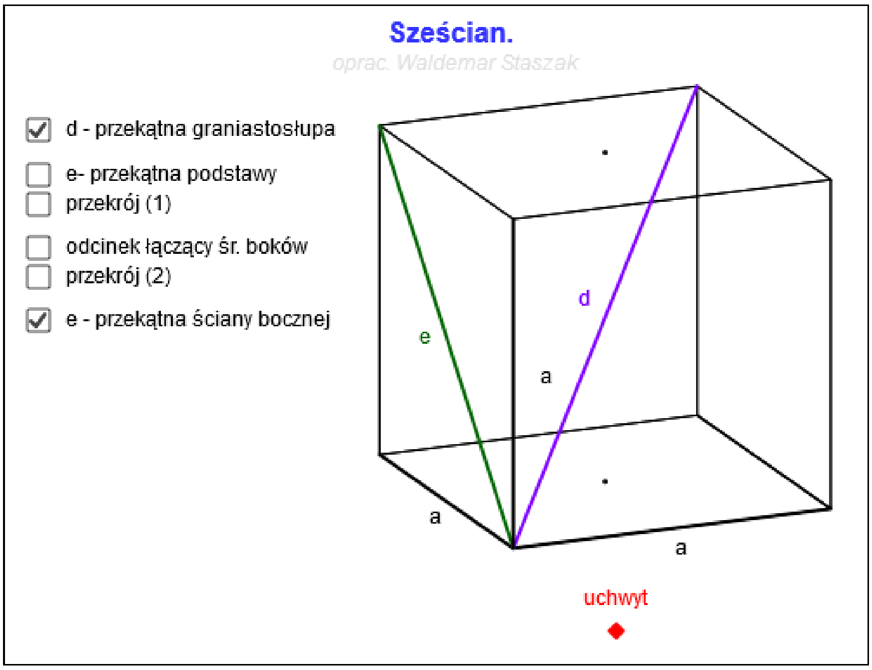
Kilka ruchomych modeli brył 3D opracowanych w programie GeoGebra z myślą o lekcjach matematyki.
http://wsgeogebra.blogspot.com/p/o-stronie.html

Wszystkie modele brył można swobodnie obracać (chwytając za element nazwany „uchwyt") i uzupełniać o podstawowe odcinki i przekroje (odznaczając odpowiednie pola wyboru). Bryły są wyświetlane bezpośrednio na stronie www, ale też istnieje możliwość pobrania plików *.ggp (pod oknem z aktywnym apletem) i pracy bezpośrednio w programie GeoGebra Ruchome rysunki ułatwiają uczniom wyobrażenie sobie poszczególnych przekrojów i odcinków w bryłach. Uczniowie lubią takie nowinki - taka „interaktywna" bryła pozwala przykuć mi ich uwagę na chwilę dłużej, a to na matematyce jest bezcenne.



Przykładowe bryły do wyboru:

a) graniastosłup prawidłowy czworokątny,
b) sześcian,
c) prostopadłościan,
d) graniastosłup prawidłowy trójkątny,
e) graniastosłup prawidłowy sześciokątny,
f) ostrosłup prawidłowy czworokątny,
g) ostrosłup prawidłowy sześciokątny,
h) ostrosłup prawidłowy trójkątny,
i) stożek, walec, kula.

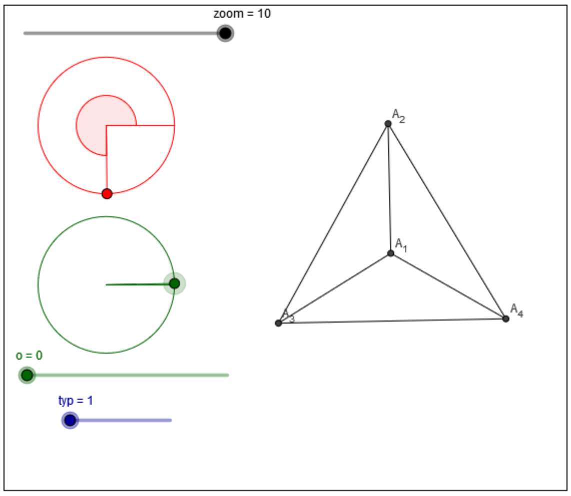


3. Przedstawianie siatek brył.
   https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Siatki_wielo%C5%9Bcian%C3%B3w

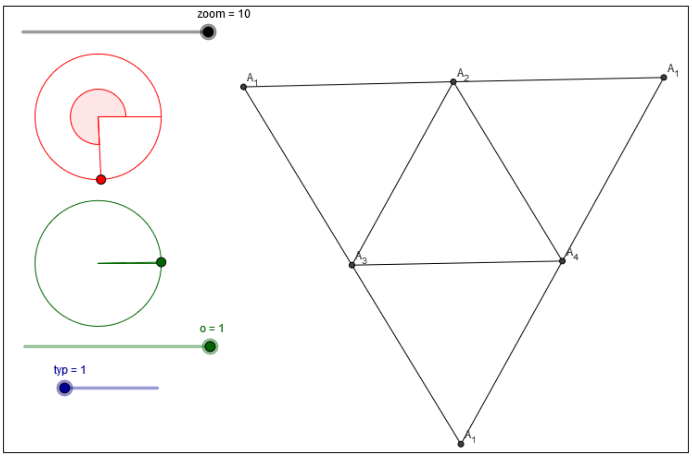
   Przykładowe bryły i ich siatki:
   a) sześcian,
   b) prostopadłościan,
   c) graniastosłup prawidłowy trójkątny,
   d) graniastosłup prawidłowy czworokątny,
   e) graniastosłup prawidłowy sześciokątny,
   f) czworościan foremny,
   g) ostrosłup prawidłowy trójkątny,
   h) ostrosłup prawidłowy czworokątny,
   i) ostrosłup prawidłowy sześciokątny.

   Suwak zoom pozwala na skalowanie obrazu. Zmiana położenia punktów na okręgach powoduje obrót figury. Zielony suwak pozwala rozwinąć siatkę, a granatowy wybrać typ siatki.

Siatki czworościanu



Siatki czworościanu



4. <u>Trójwymiarowe obrazy – anaglify.</u>
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Anaglify
Anaglify (trójwymiarowe bryły) dostosowane są do okularów czerwono-turkusowych.

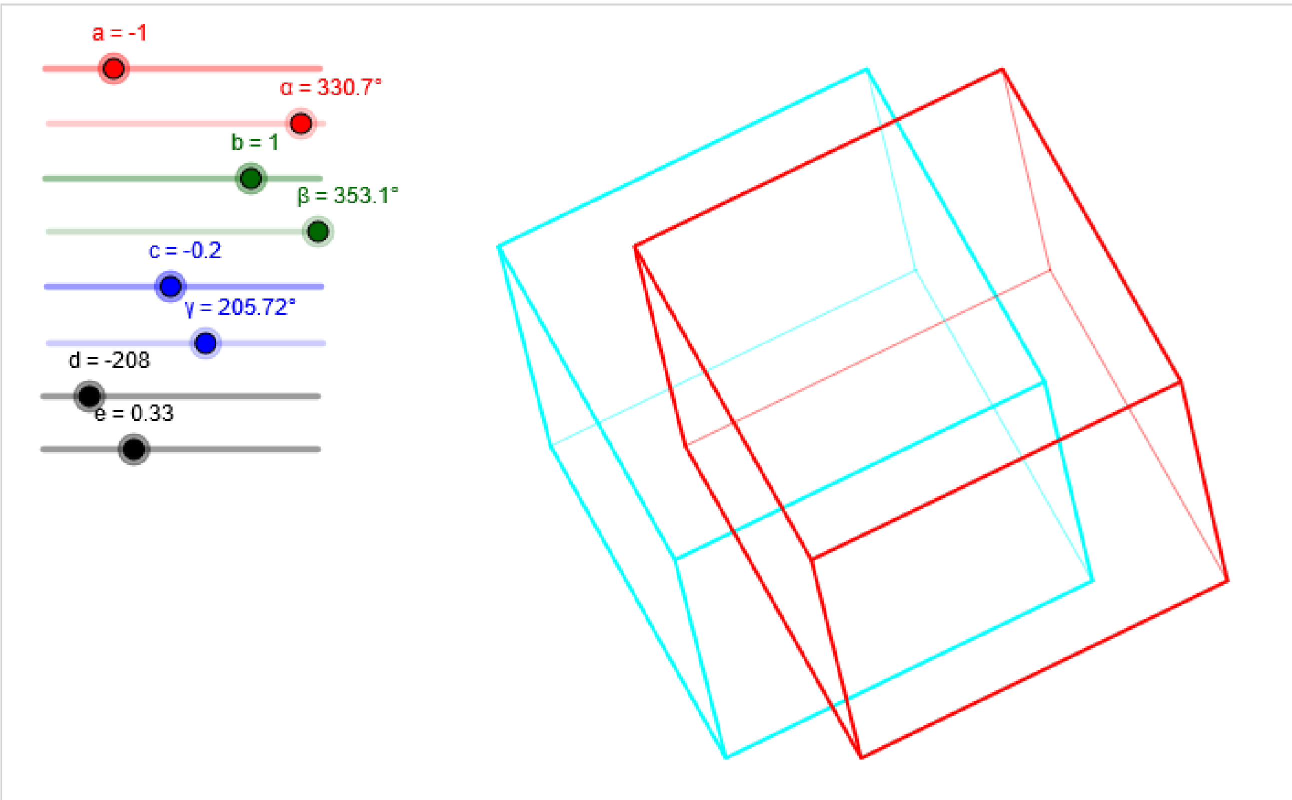
Dostępne są anaglify następujących brył:

A) bryły foremne:
   a) sześcian,
   b) czworościan,
   c) ośmiościan,
   d) dwunastościan,
   e) dwudziestościan.

B) graniastosłupy:
   a) graniastosłup prawidłowy trójkątny,
   b) graniastosłup prawidłowy czworokątny,
   c) graniastosłup prawidłowy pięciokątny,
   d) graniastosłup prawidłowy sześciokątny.

C) ostrosłupy:
   a) ostrosłup prawidłowy trójkątny,
   b) ostrosłup prawidłowy czworokątny,
   c) ostrosłup prawidłowy pięciokątny,
   d) ostrosłup prawidłowy sześciokątny.

Sześcian



5. Zagadnienia związane z matematyką 3D dostępne w programie GeoGebra (całość).
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Polish#Stereometria

Dostępne zagadnienia ze stereometrii:

a) graniastosłupy:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Graniastos%C5%82upy
b) ostrosłupy:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Ostros%C5%82upy
c) bryły platońskie:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Bry%C5%82y_plato%C5%84skie
d) bryły obrotowe:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Bry%C5%82y_obrotowe
e) bryły półforemne – archimedesowe:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Bry%C5%82y_p%C3%B3%C5%82foremne_-_archimedesowe
f) inne wielościany:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Inne_wielo%C5%9Bciany
g) inne obiekty przestrzenne (wstęga Möbiusa):
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Inne_obiekty_przestrzenne
h) kąty w przestrzeni:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/K%C4%85ty_w_przestrzeni
i) przekroje:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Przekroje
j) siatki wielościanów:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Siatki_wielo%C5%9Bcian%C3%B3w
k) szkicowanie brył:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Szkicowanie_bry%C5%82
l) anaglify:
https://archive.geogebra.org/en/wiki/index.php/Anaglify

Opracowanie: Anna Frąszczak, Małgorzata Szymczak, ZS w Nekli

III. Projekty edukacyjne

Projekt 1 - Bryłki bez kleju

Bryłki bez kleju – po złożeniu bryły ściany z rysunkami są na wierzchu, ściany bez rysunków nie będą widoczne. Dowolny schemat należy wydrukować i wyciąć (uwaga! linie pogrubione na schemacie również należy przeciąć). Następnie kartkę należy pozaginać wzdłuż zaznaczonych linii. Kierunek wszystkich zagięć jest ten sam, tj. „do środka”. Mając tak przygotowaną kartkę pozostaje ją odpowiednio złożyć aby uzyskać gotową bryłę.

Wykorzystano stronę Koła Naukowego Informatyki Przemysłowej z Rzeszowa, na której dostępne są również pliki do pobrania.

Poniżej przedstawiono informacje ze strony internetowej: https://knip.prz.edu.pl/projekty/brylki-bez-kleju

Bryłki bez kleju

Na tej stronie prezentujemy ***Bryłki bez kleju***. Jest to projekt, który został zrealizowany przez panią mgr Weronikę Woś wraz ze studentami pierwszego roku kierunku zarządzanie i inżynieria produkcji Naszego wydziału. Zadanie polegało na zaprojektowaniu i wykonaniu schematów brył, które można złożyć bez użycia kleju. Efektem wspólnej pracy jest 8 zaprezentowanych tutaj schematów. Prace prowadzone były na programach obsługujących grafikę wektorową. Dodatkowym zadaniem było nakręcenie filmów instruktażowych, które prezentowałyby sposób złożenia brył. Filmiki te będą sukcesywnie prezentowane na Fanpage'u Wydziału Mechaniczno -Technologicznego:

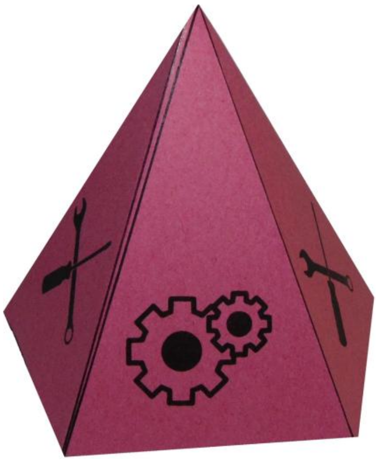
https://www.facebook.com/prz.stw/

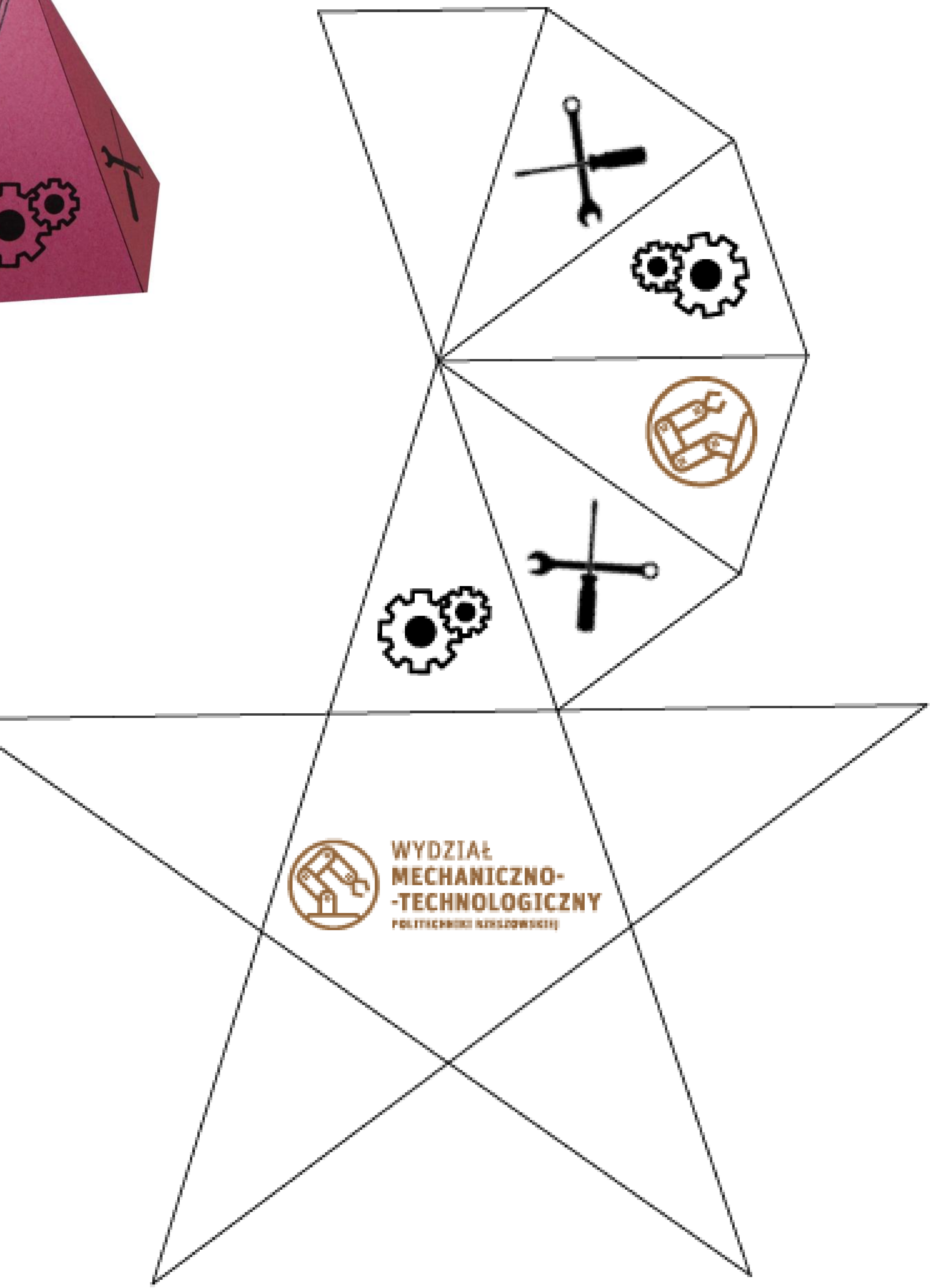
Ponadto każda z brył została wykonana z kolorowego papieru, a zdjęcia przedstawiające jak wyglądają poszczególne bryły również zostały tutaj dołączone. ***Bryłki bez kleju*** mogą służyć jako materiały pomocnicze do nauki matematyki w szkołach. W szczególności na lekcjach z działu stereometria. Dlatego zachęcamy wszystkich nauczycieli matematyki i nie tylko do zapoznania się z tym projektem. Poza tym ***Bryłki bez kleju*** mogą być po prostu świetną zabawą. Wystarczy pobrać dowolny gotowy schemat, wydrukować go i wyciąć (linie pogrubione również należy przeciąć). Następnie kartkę należy pozaginać wzdłuż zaznaczonych linii. Kierunek wszystkich zagięć jest ten sam, tj. „do środka". Mając tak przygotowaną kartkę pozostaje ją odpowiednio złożyć aby uzyskać gotową bryłę.

Życzymy dobrej zabawy z ***Bryłkami bez kleju***!

Załącznik nr 1

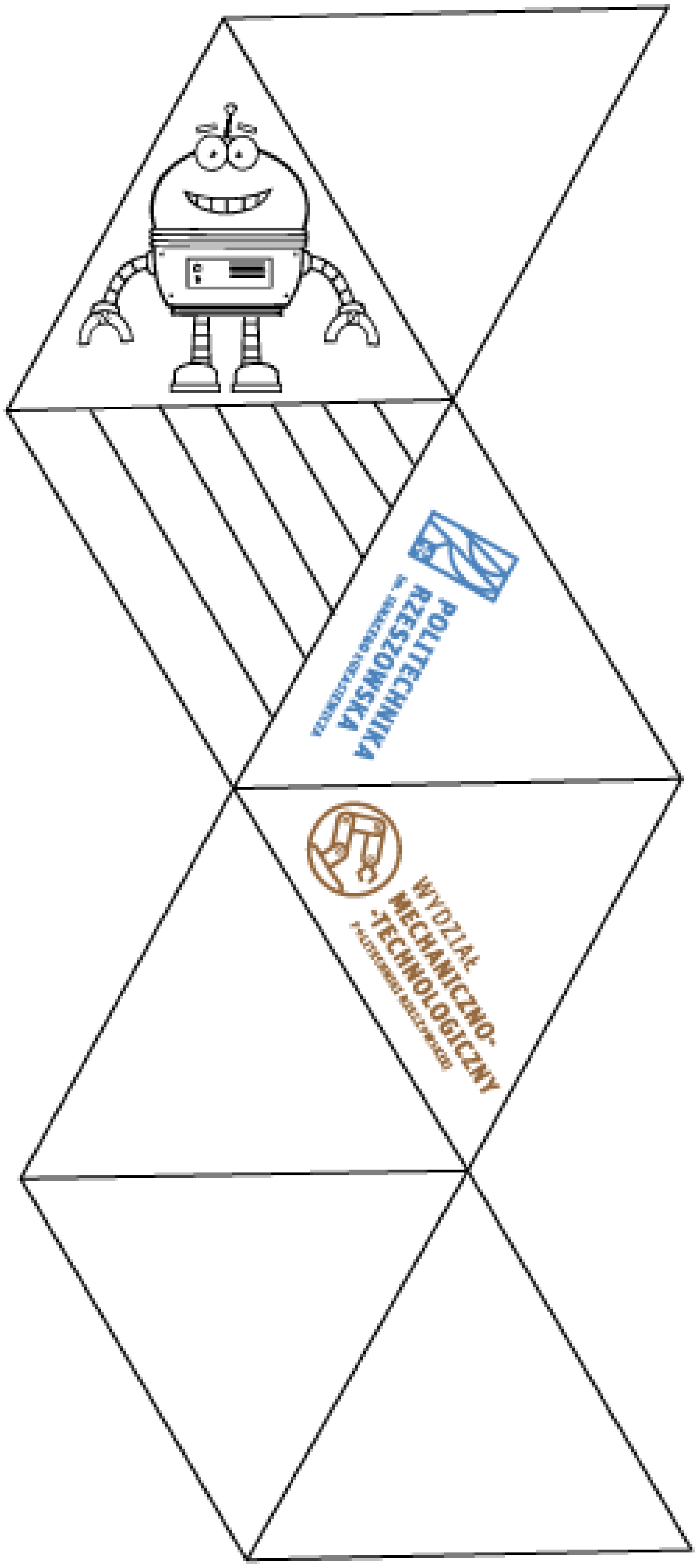
– ostrosłup prawidłowy pięciokątny





Załącznik nr 2

– czworościan foremny

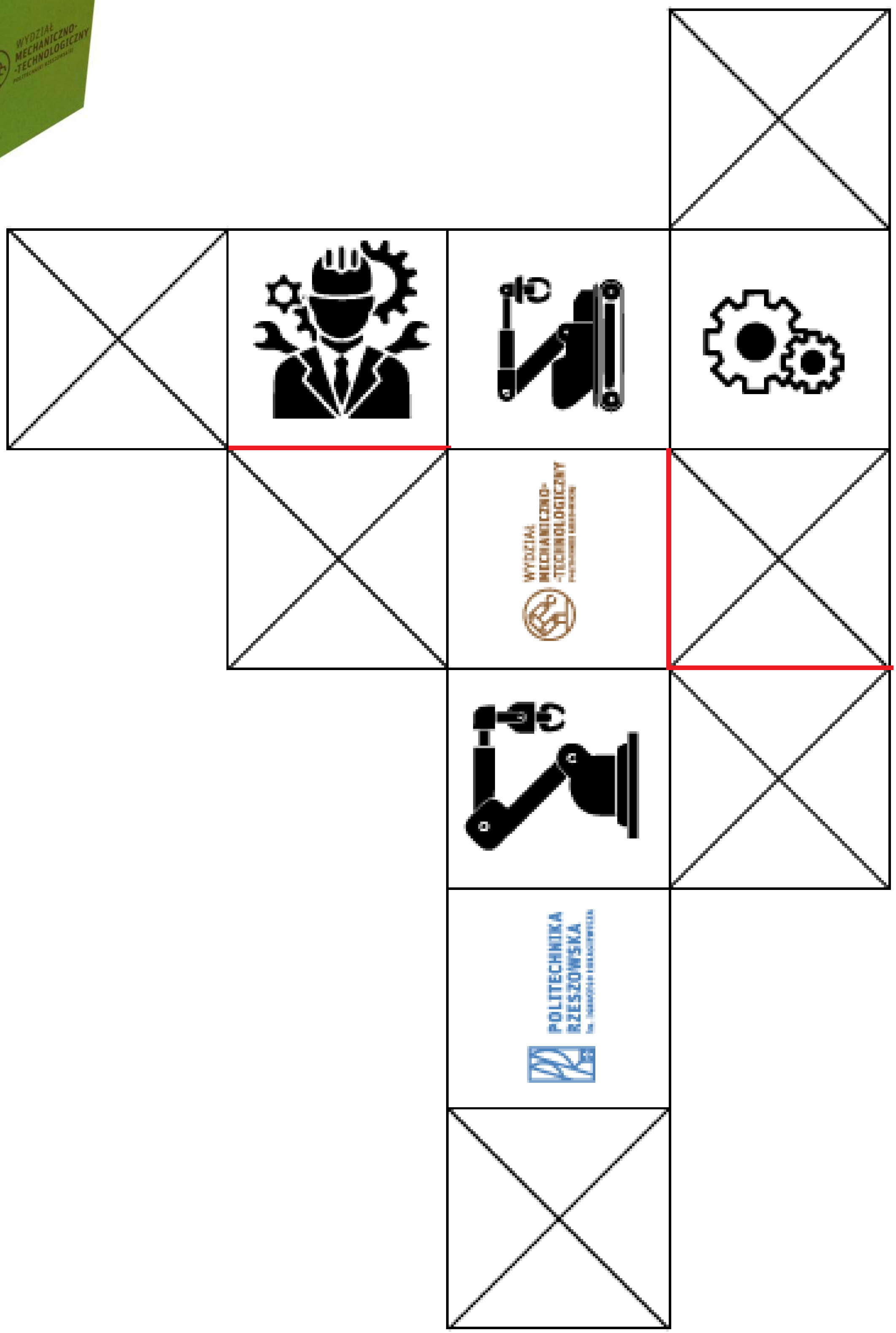


Załącznik nr 3

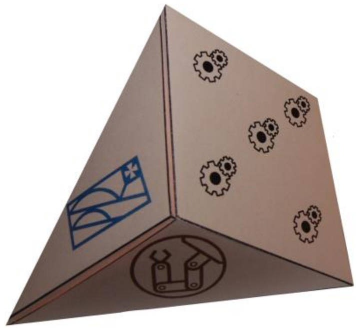
– ostrosłup prawidłowy trójkątny [Uwaga! Linie pogrubione (czerwone) na schemacie należy przeciąć.]

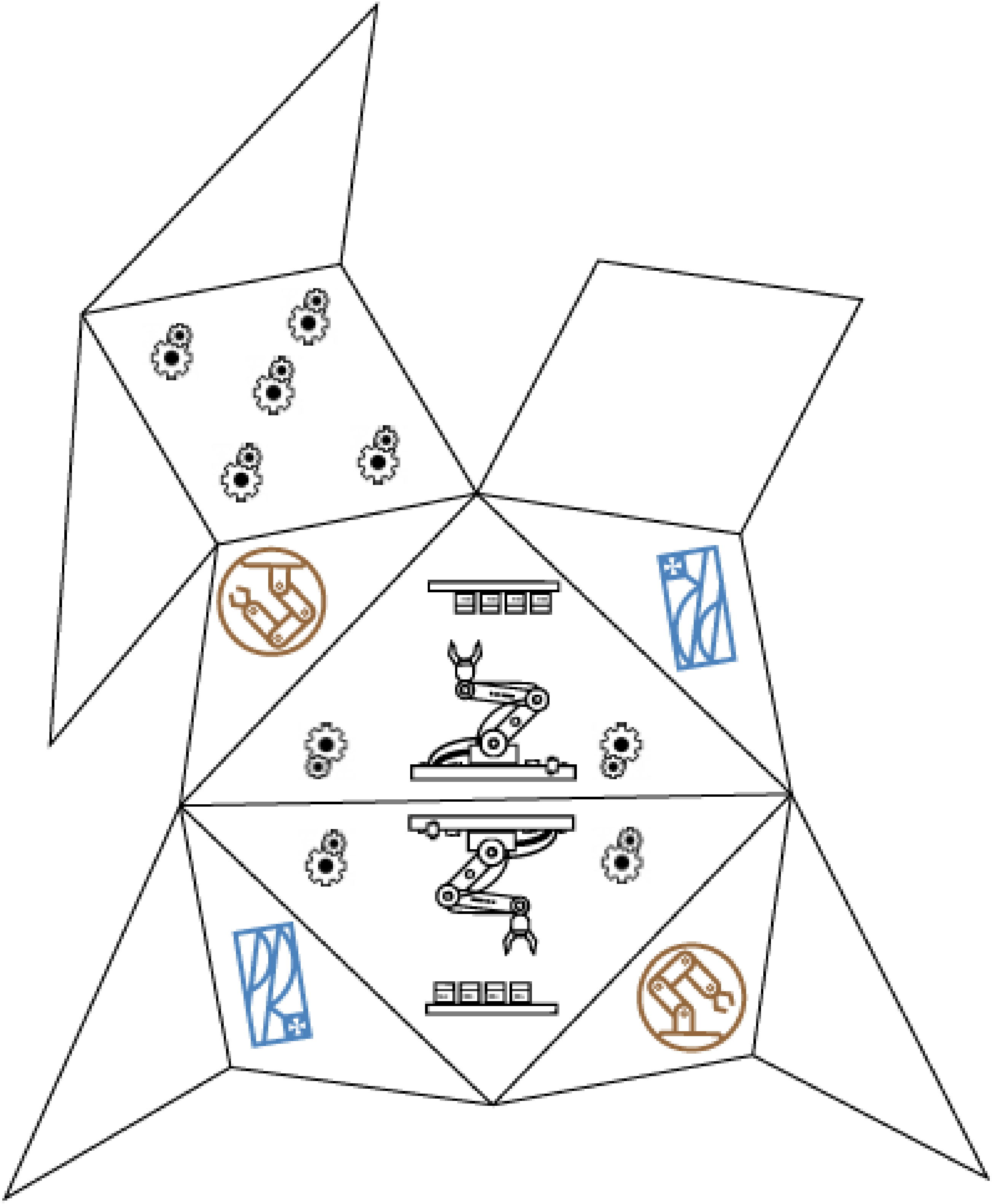
Załącznik nr 4

– sześcian [Uwaga! Linie pogrubione (czerwone) na schemacie należy przeciąć.]



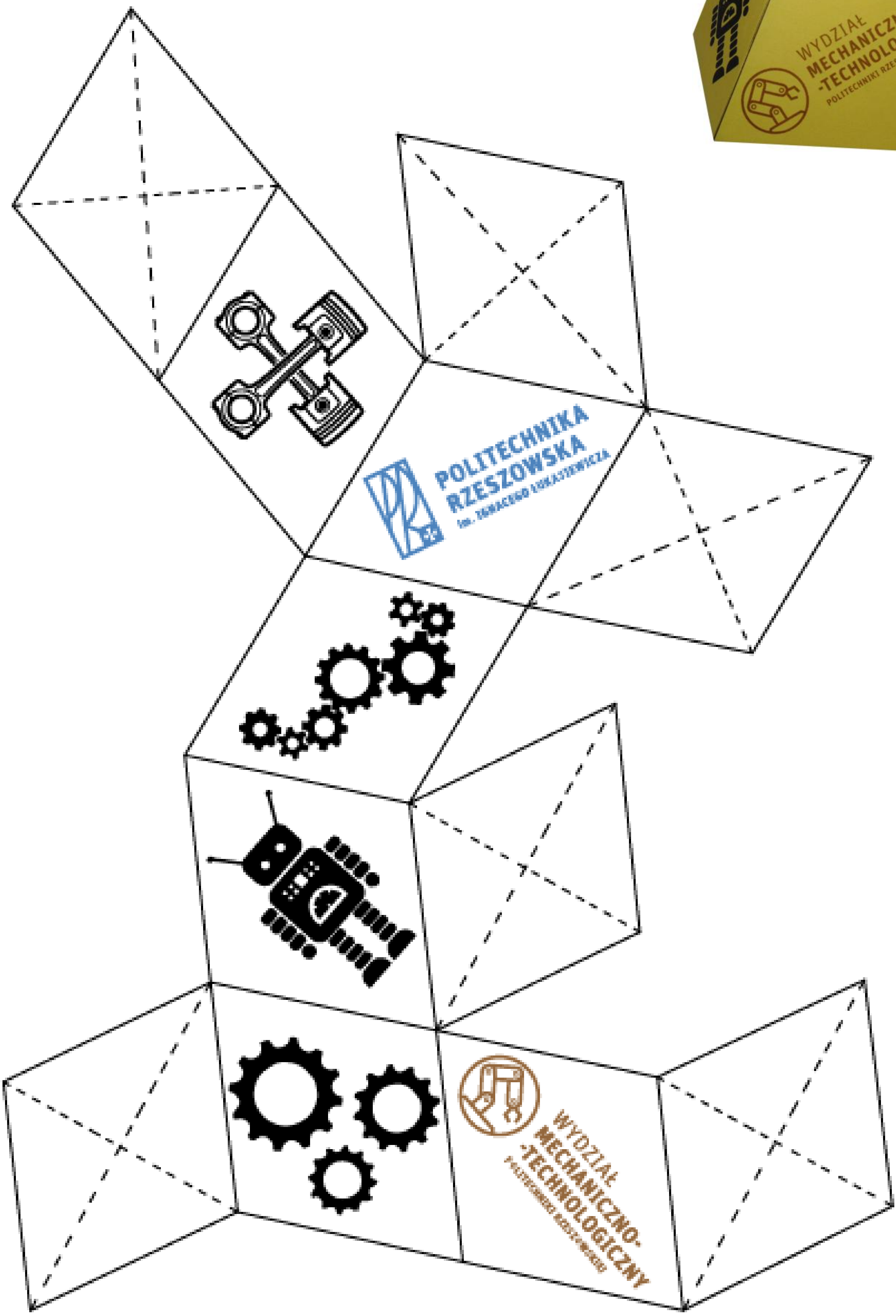
Załącznik nr 5



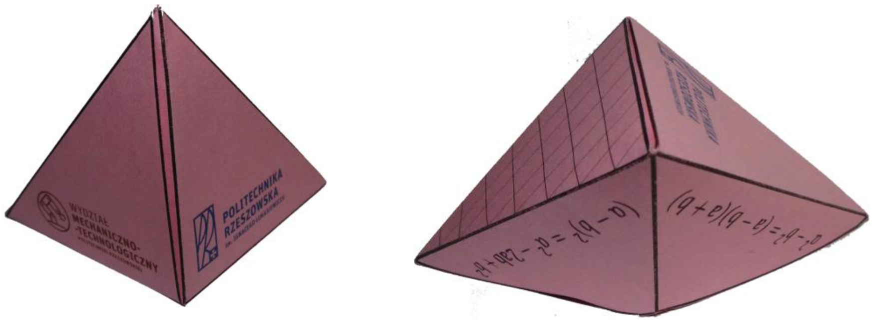


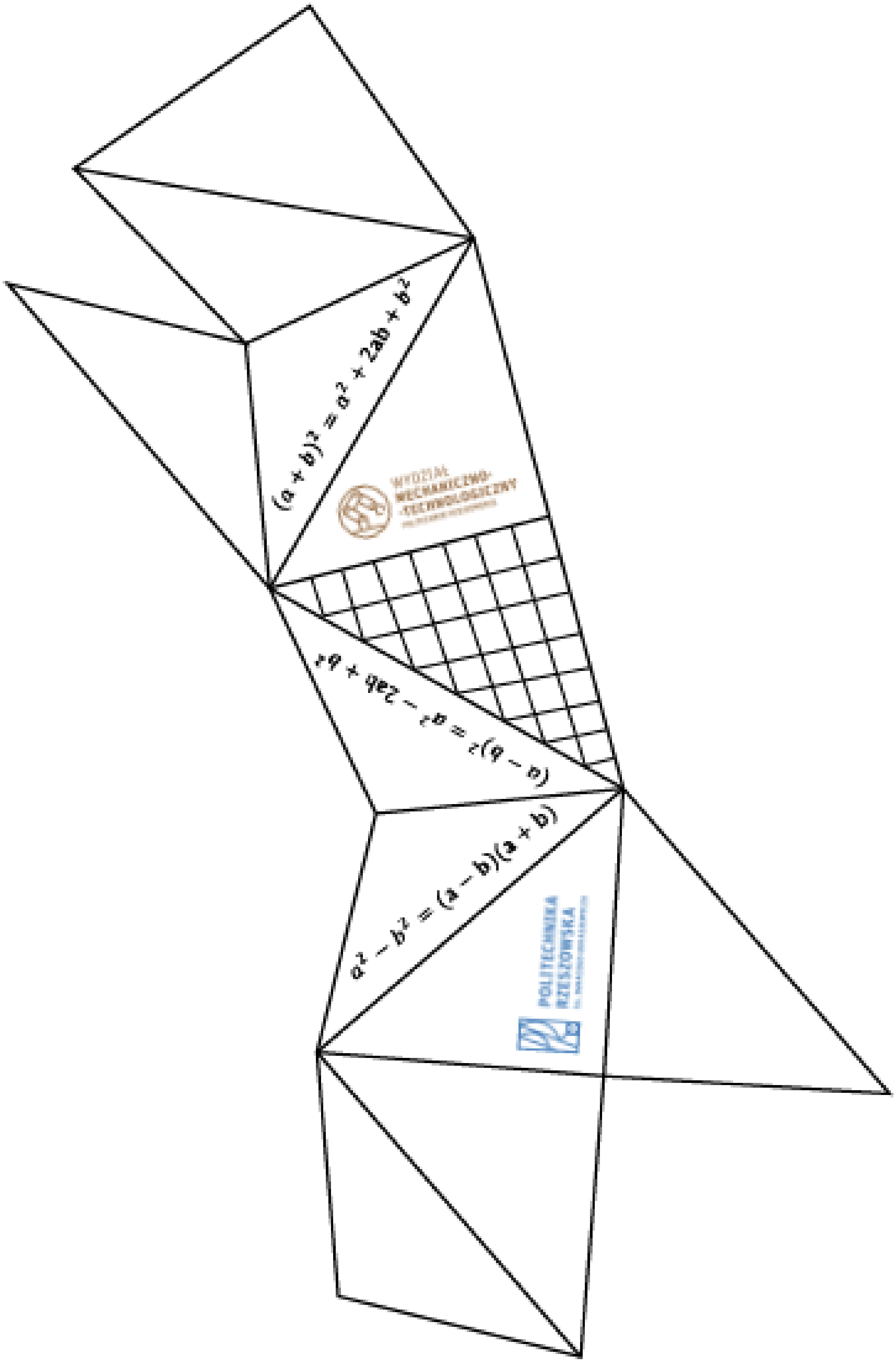
Załącznik nr 6

– **romboedr (rombościan)** – równoległościan, którego każda ściana jest rombem.



Załącznik nr 7

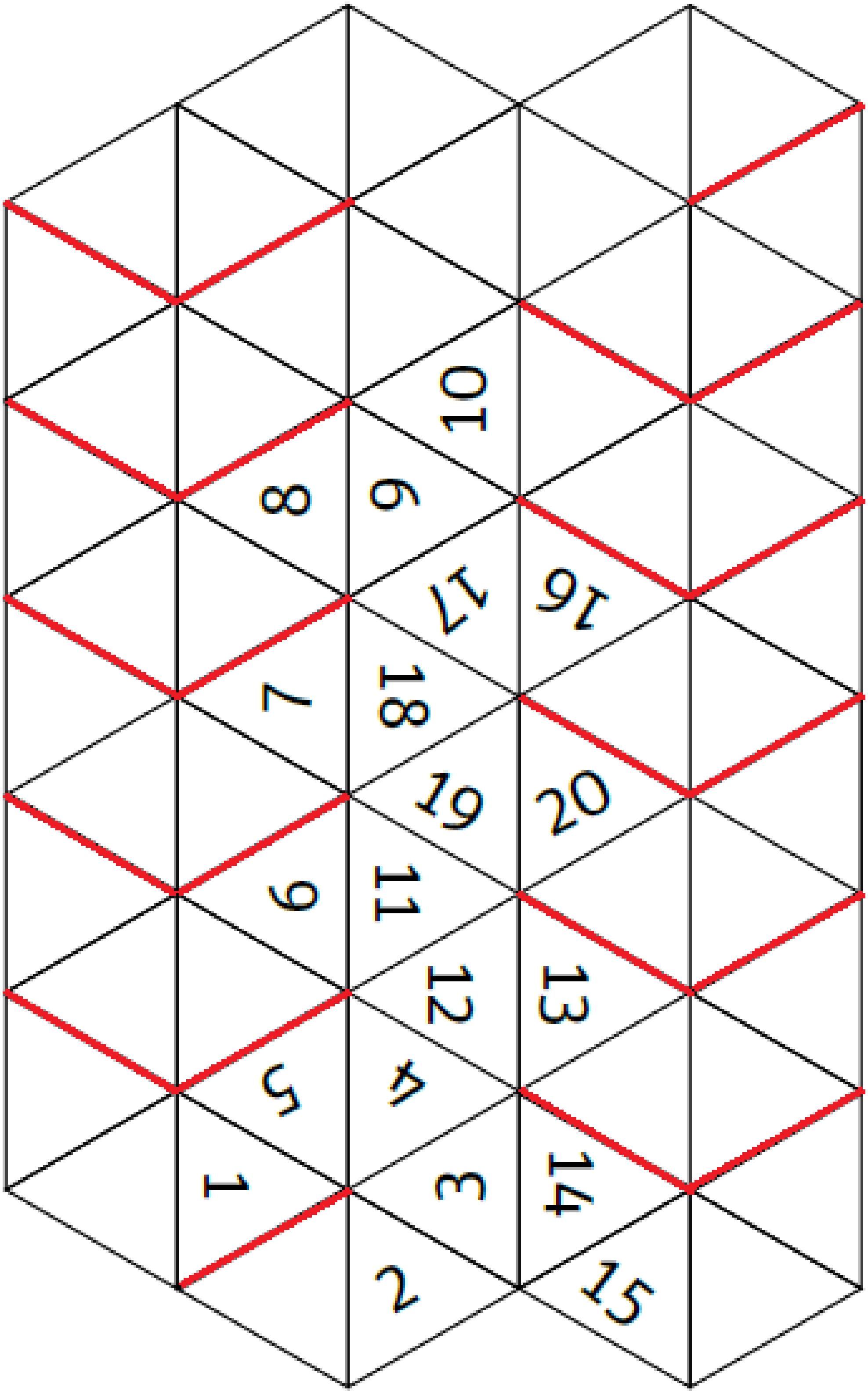




Załącznik nr 8

– **dwudziestościan foremny** (20 ścian będących trójkątami równobocznyn

[Uwaga! Linie pogrubione (czerwone) na schemacie należy przeciąć.]



Opracowanie: Anna Frąszczak, Małgorzata Szymczak, ZS w Nekli

Projekt 2 – Matematyczne miasto

Stwórz makietę miasta zgodnie z poniższymi wskazówkami:

1. Ulice: Stefana Banacha, StanisławaMazura, Władysława Orlicza, Stanisława Ulama są do siebie równoległe.
2. Ulice: Pitagorasa, Talesa, Archimedesa i Euklidesa są do siebie równoległe i prostopadłe do ulic wymienionych w punkcie 1.
3. Przy skrzyżowaniu ulic Archimedesa i Stanisława Ulama stoi szkoła.
4. Pomiędzy ulicami Banacha i Mazura znajduje się plac zabaw.
5. Budynek szkoły jest prostopadłościanem o podstawie 35m x 20m i wysokości 7m. Wykonaj model szkoły w skali 1 : 200.
6. Na makiecie umieść ponadto w wybranych przez siebie miejscach: sklep, budynki mieszkalne, zaplanuj boisko.
7. Sporządź krótką notatkę dotyczącą nazwisk wymienionych w punkcie 1.

Uczniowie pracują w grupach, przygotowując elementy opisane w zadaniu poza szkołą i tworzą ostateczny kształt makiety podczas zajęć.

Opracowanie: Magdalena Wojciechowska

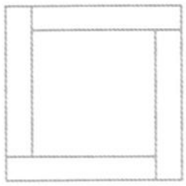
Przykładowe projekty edukacyjne polecane na http://matematyka.wroc.pl/kacik-naukowy/projekty

Zbiór zadań otwartych

Szkoła podstawowa klasa 6

Zadanie 6.1

Pan Kowalski wykonał z czterech desek ramkę (patrz rysunek). Grubość każdej z desek to 2cm, szerokość - 5cm, długość - 30cm. Pan Kowalski chce pomalować całą ramkę. Oblicz całkowite pole powierzchni tej ramki.



Zadanie 6.2

Suma długości krawędzi sześcianu jest równa sumie długości krawędzi bocznych prostopadłościanu i jest równa 72cm. Krawędzie podstawy prostopadłościanu wyrażają się kolejnymi liczbami naturalnymi. Jakie wymiary ma prostopadłościan, a jaka jest długość krawędzi sześcianu, jeżeli bryły te mają taką samą objętość?

Zadanie 6.3

Do prostopadłościennego magazynu meblowego o wymiarach 20m x 12 m x 3 m wstawiono: 12 szaf o wymiarach 1,4 m x 0,40 m x 16dm, 18 kredensów kuchennych o objętości 0,768 m^3 każdy oraz 15 szafek o wymiarach 0,80 m x 5dm x 90cm.

a) O ile m^3 zmniejszyła się objętość magazynu, jeżeli wiadomo, że $\frac{2}{5}$ jego objętości było już wykorzystane?
b) Ile procent jego pojemności nie zostało wykorzystanych?

Zadanie 6.4

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa jest o 40% większe od pola powierzchni podstawy. Podstawą jest prostokąt o wymiarach 6cm x 0,4dm. Oblicz pole powierzchni całkowitej tego ostrosłupa.

Szkoła podstawowa klasa 8

Zadanie 8.1

Podstawą graniastosłupa prostego jest trójkąt równoramienny , którego dwa równe kąty mają po 45^{o}, a najdłuższy bok tego trójkąta ma 6dm. Jeden z boków prostokąta, który jest w tym graniastosłupie ścianą boczną o największej powierzchni ma długość 4dm. Oblicz objętość i pole całkowite tego graniastosłupa.

Zadanie 8.2

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 192 cm^2. Pole powierzchni bocznej jest dwa razy większe od pola podstawy. Oblicz wysokość ściany bocznej tego ostrosłupa.

Zadanie 8.3

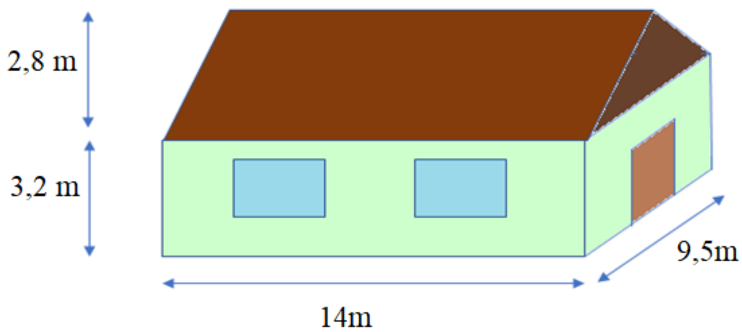
W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym każda ściana boczna jest kwadratem o polu 81 cm^2 . Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa.

Zadanie 8.4

Kubatura to inaczej pojemność lub objętość budynku. Kubatura budynku jest wartością wyliczaną na potrzeby podatkowe – jest ważnym elementem służącym do określania podatków od nieruchomości. Jest to więc termin budowlany ściśle powiązany z ekonomią, który nie ma żadnego wpływu na zwykłe użytkowanie budynku.

https://www.nieruchomosci-online.pl/porady/kubatura-budynku-4552.html

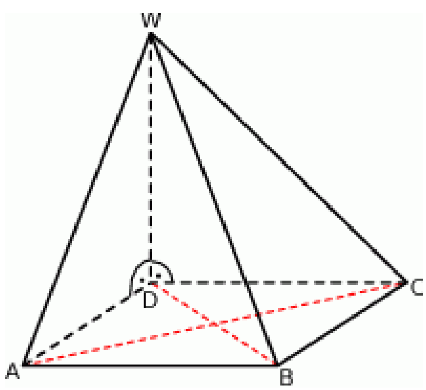
Oblicz kubaturę budynku przedstawionego na rysunku:



Zadanie 8.5

Podstawą ostrosłupa ABCDW jest prostokąt ABCD. Krawędź boczna DW jest wysokością tego ostrosłupa. Krawędzie boczne AW, BW i CW mają następujące długości: $|AW| = 6, |BW| = 9, |CW| = 7$.

Oblicz objętość tego ostrosłupa.

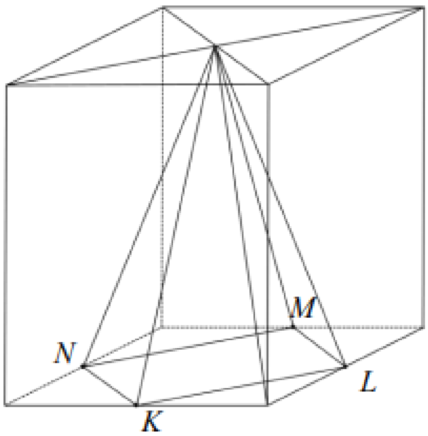


Zadanie 8.6

Suma długości wszystkich krawędzi prostopadłościanu jest równa 60cm. Uzasadnij, że średnia arytmetyczna długości krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka tego prostopadłościanu jest równa 5.

Zadanie 8.7

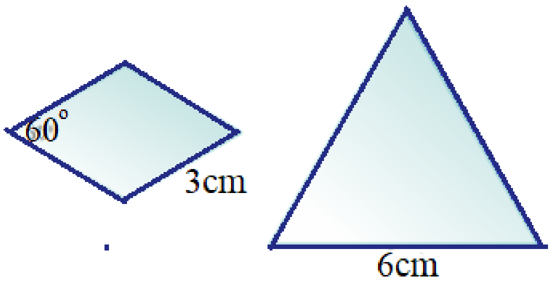
Punkty K, L, M, N są środkami krawędzi jednej z podstaw graniastosłupa prawidłowego czworokątnego, a punkt S jest punktem przecięcia przekątnych drugiej podstawy tego graniastosłupa (patrz rysunek)



Uzasadnij, że objętość ostrosłupa KLMNS stanowi $\frac{1}{6}$ objętości graniastosłupa.

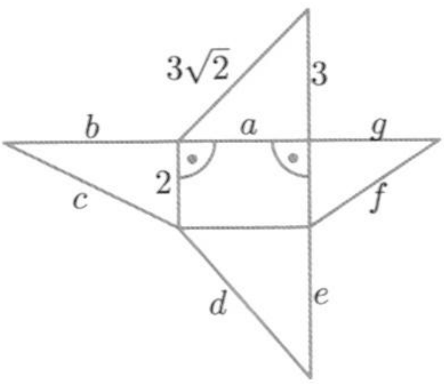
Zadanie 8.8

Dwa graniastosłupy proste mają równe objętości. Podstawą jednego z nich jest romb, a drugiego trójkąt równoboczny (wymiary figur na rysunku). Wysokość niższego graniastosłupa jest równa 12cm. Oblicz wysokość drugiego graniastosłupa.



Zadanie 8.9

Oblicz sumę długości wszystkich krawędzi ostrosłupa, którego siatkę przedstawia rysunek.



Zadanie 8.10

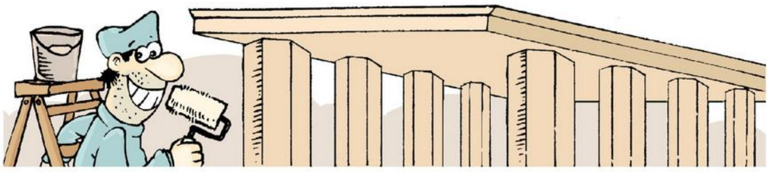
Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego trójkątnego jest równe $36\sqrt{3}cm^2$. Pole powierzchni bocznej tego ostrosłupa jest równe $27\sqrt{3}cm^2$. Oblicz długość krawędzi bocznej tego ostrosłupa.

Zadanie 8.11

Akwarium w kształcie prostopadłościanu ma długość 60cm, a szerokość 25cm. kostka sześcienna o krawędzi 10cm wrzucona do tego akwarium całkowicie zanurzyła się w wodzie. O ile centymetrów podniósł się poziom wody w akwarium?

Zadanie 8.12

Kolumna ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 4m i krawędzi podstawy 50cm. Osiem takich kolumn mamy pomalować farbą, której 1 litr wystarcza na pomalowanie 10 m^2 powierzchni. Ile farby zużyjemy?



Zadanie 8.13

Silnie wiejący wiatr i duże opady śniegu spowodowały uszkodzenie dachu w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 8 m i wysokości 3 m. Jaki będzie koszt zakupu blachy na pokrycie dachu, jeżeli należy uwzględnić 3% zapas blachy, a za 1 m^2 tej blachy trzeba zapłacić 250 zł?

Zadanie 8.14

Akwarium w kształcie prostopadłościanu o długości 0,6m, szerokości 50cm i wysokości 4dm napełniono do połowy wodą. O ile centymetrów podniesie się poziom wody w akwarium, jeżeli wlejemy do niego 8 butelek wody o pojemności 750ml?

Zadanie 8.15

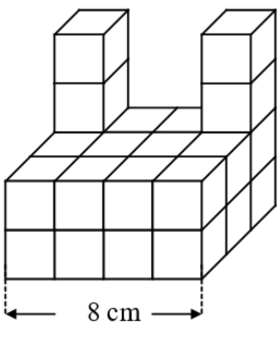
W prostopadłościanie długości krawędzi podstawy i wysokość mają się do siebie jak 1 : 2 : 4. Przekątna podstawy ma długość $5\sqrt{5}$. Oblicz długości wszystkich krawędzi tej bryły.

Zadanie 8.16

Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa prawidłowego czworokątnego wynosi 96 cm^2. Pole podstawy stanowi 60% pola całej powierzchni bocznej. Oblicz długość wysokości ściany bocznej.

Zadanie 8.17

Rysunek przedstawia figurę przestrzenną zbudowaną z sześciennych klocków.



Oblicz pole powierzchni i objętość tej figury.

Szkoły ponadpodstawowe

Zadanie 1
W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym powierzchnia boczna po rozwinięciu jest kwadratem o polu P=400. Oblicz objętość i pole powierzchni całkowitej tej bryły.

Zadanie 2
Trapez prostokątny o podstawach 4 i 5 oraz kącie ostrym 45^0 obraca się wokół krótszej podstawy. Oblicz objętość otrzymanej bryły.

Zadanie 3
W graniastosłupie czworokątnym prawidłowym przekątna o długości 5 jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem α takim, że $\sin\alpha = \frac{1}{5}$. Wyznacz objętość tego graniastosłupa.

Zadanie 4
W ostrosłupie prawidłowym czworokątnym krawędź podstawy ma długość 12, a ściana boczna jest nachylona do płaszczyzny podstawy pod kątem o mierze 30°. Wykonaj rysunek, zaznacz dany kąt i oblicz pole powierzchni bocznej oraz objętość ostrosłupa.

Zadanie 5

Tworząca stożka o kącie rozwarcia α ma długość 8. Pole powierzchni całkowitej tego stożka jest równe 48π. Oblicz objętość stożka oraz miarę kąta α.

Zadanie 6

Dany jest graniastosłup prawidłowy czworokątny $ABCDEFGH$ o krawędzi podstawy długości $4\sqrt{2}$ oraz krawędzi bocznej równej 8. Graniastosłup przecięto płaszczyzną przechodzącą przez środki krawędzi AD i DC oraz przez wierzchołek H (zobacz rysunek). Oblicz pole otrzymanego przekroju.

Zadanie 7
Pani Kowalska, chcąc uczcić koniec remontu, upiekła ciastka. Z wyrobionego ciasta w formie kuli o średnicy 10 cm uformowała ciastka w kształcie walca o wysokości 4 cm i promieniu podstawy 1cm. Ile ciastek upiekła pani Majewska oraz czy wykorzystała całe przygotowane ciasto?

Zadanie 8
Szklane akwarium ma kształt graniastosłupa prawidłowego sześciokątnego o wysokości 40cm i krawędzi podstawy 20cm. Oblicz pole zewnętrznej powierzchni akwarium.

Zadanie 9
Walec do utwardzenia i gładzenia nawierzchni dróg ma średnicę 2m i wysokość 2,5m. Ile metrów kwadratowych drogi utwardzi i wygładzi, gdy obróci się w jednym kierunku 200 razy?

Zadanie 10
Metalowy stożek ma wysokość 10cm. Średnica jego podstawy wynosi 6cm. Jaka jest masa tego stożka, jeżeli gęstość metalu wynosi 8,5 g/cm^3. Wynik podaj z dokładnością do 10 g.

Zadanie 11

Bartek przyjmował trzy razy dziennie lek w płynie. Działanie leku jest skuteczne, jeżeli w ciągu doby zażywa się od 35 ml do 45 ml. Mama podawała synowi lek w stożkowym kieliszku, w którym mieści się dokładnie 15 ml. Bartek nie lubi lekarstwa i za każdym razem wypił je tylko do połowy wysokości. Czy lek pomógł Bartkowi wyzdrowieć?

Zadanie 12

Dany jest prostopadłościan, którego długości boków wyrażają się liczbami spełniającymi równanie: $x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$

Dla tego prostopadłościanu wyznacz:

a) objętość i pole powierzchni,

b) długość przekątnej,

c) pole przekroju będącego częścią wspólną tego graniastosłupa i płaszczyzny przechodzącej przez równoległe przekątne ścian o największym polu,

d) objętość i pole powierzchni bryły powstałej po odcięciu w jednym z narożników sześcianu o wymiarach 1,5 x 1,5 x 1,5 (jednostek).

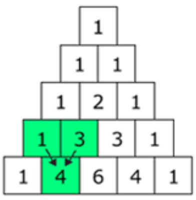
Zadanie 13

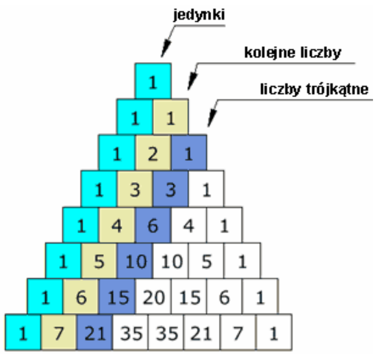
Wyznacz pole powierzchni i objętość czworościanu foremnego, którego długość krawędzi równa jest najmniejszej liczbie naturalnej spełniającej nierówność:

$log_6(x+1) + log_6(2x+1) > 1$

Zadanie 14

Jednym z najbardziej interesujących układów liczbowych jest trójkąt Pascala





Liczbę czworościenną można zrozumieć, jeżeli wyobrazimy sobie stos kul w kształcie czworościanu. Policzyć trzeba, ile kul potrzeba do zbudowania stosu o danej wysokości.

- Dla wysokości = 1 potrzebna jest tylko jedna kula.
- Dla wysokości = 2 potrzebne są 4 kule (1 na wierzchu i 3 na spodzie).
- Dla wysokości = 3 potrzeba 10 kul.
- Dla wysokości = 4 potrzeba 20 kul.

Ile potrzeba kul dla wysokości = 5?

Zadania zamknięte

Zadanie 1

Ściany boczne 6 kolumn w kształcie prostopadłościanu o wymiarach podstawy 3dm i wysokości 3,5m pomalowano farbą. Ile litrów farby×3dm zużyto, jeśli dwulitrowa puszka farby starcza na pomalowanie 14m^2 powierzchni?

A. 0,9 l
B. 1,8 l
C. 3,6 l
D. 7,2 l

Zadanie 2

Drewnianą donicę w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego o krawędzi podstawy 0,3m i wysokości 0,4 m napełniono do połowy ziemią.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
W donicy tej znajduje się

A. 36 litrów ziemi,
B. 18 litrów ziemi
C. 12 litrów ziemi
D. 6 litrów ziemi.

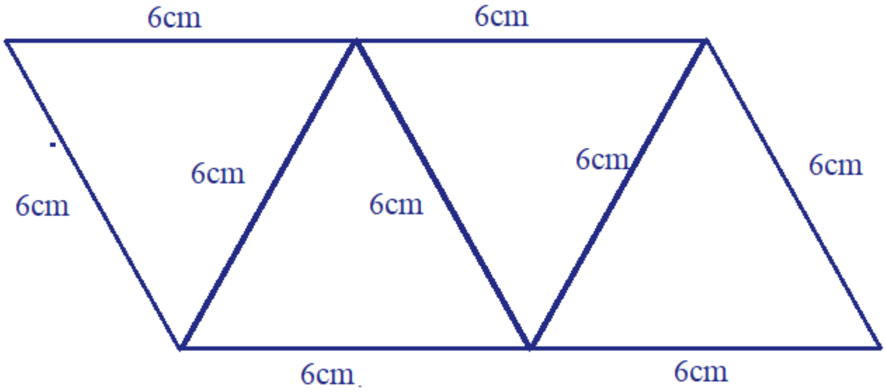
Zadanie 3

Krawędź sześcianu ma długość równą przekątnej kwadratu o boku 12 cm.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Długość wszystkich krawędzi sześcianu wynosi

A. $144\sqrt{2}$cm
B. 144 cm
C. $72\sqrt{2}$cm
D. 864 cm

Zadanie 4

Rysunek przedstawia siatkę czworościanu foremnego.



Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, F – jeżeli jest fałszywe.

Suma wszystkich krawędzi tego czworościanu jest równa 48 cm.	P	F
Pole powierzchni całkowitej tego czworościanu wynosi $36\sqrt{3}$ cm^2.	P	F

Zadanie 5

Z klocka w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego wycięto ostrosłup o takiej samej podstawie i wysokości jak w graniastosłupie.
Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.
Pozostała po wycięciu ostrosłupa część klocka stanowi

A. $\frac{2}{3}$ całego klocka

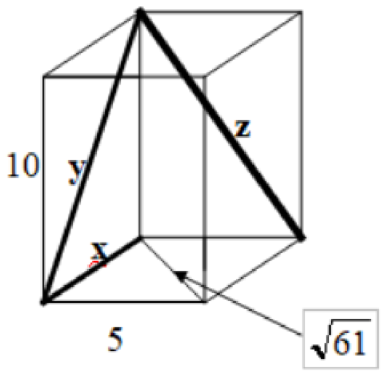
B. $\frac{1}{2}$ całego klocka

C. $\frac{1}{3}$ całego klocka

D. $\frac{3}{4}$ całego klocka

Zadanie 6

Dany jest prostopadłościan o wymiarach podanych na rysunku

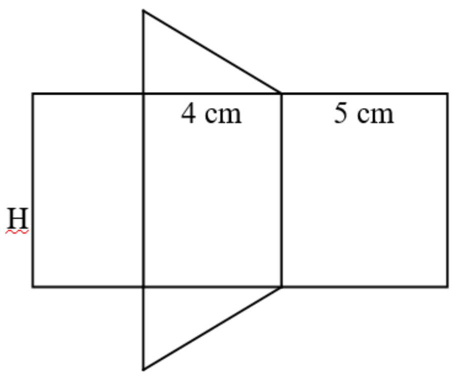


Oceń prawdziwość podanych zdań Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, F – jeżeli jest fałszywe.

Długość odcinka y jest równa długości odcinka z.	P	F
Suma wszystkich krawędzi prostopadłościanu wynosi 80.	P	F

Zadanie 7

Rysunek przedstawia siatkę graniastosłupa prostego trójkątnego, którego podstawą jest trójkąt prostokątny. Jego objętość wynosi 36 cm^2.

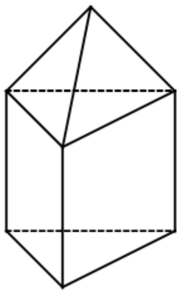


Oceń prawdziwość podanych zdań Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, F – jeżeli jest fałszywe.

Wysokość tego graniastosłupa jest równa 6 cm.	P	F
Pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa wynosi 84 cm^2.	P	F

Informacja do zadań 8 i 9.

W narysowanym wielościanie wszystkie krawędzi mają jednakową długość, a ich suma wynosi 96cm.



Zadanie 8

Oceń prawdziwość podanych zdań. Wybierz P, jeżeli zdanie jest prawdziwe, F – jeżeli jest fałszywe.

Długość jednej krawędzi wynosi 12 cm.	P	F
Wielościan ten składa się z graniastosłupa prawidłowego trójkątnego i czworościanu foremnego.	P	F

Zadanie 9

Dokończ zdanie tak, aby otrzymać zdanie prawdziwe.

Pole powierzchni tego wielościanu wynosi

A. $(192 + 16\sqrt{3})\ cm^2$

B. $(192 + 48\sqrt{3})\ cm^2$

C. $(192 + 64\sqrt{3})\ cm^2$

D. $(192 + 80\sqrt{3})\ cm^2$

Zadanie 10

Długości czterech równoległych krawędzi pudełka w kształcie sześcianu zwiększono o 25%, a długości ośmiu pozostałych krawędzi zmniejszono o 20%.

Objętość tego pudełka

A. zwiększyła się o 25%,

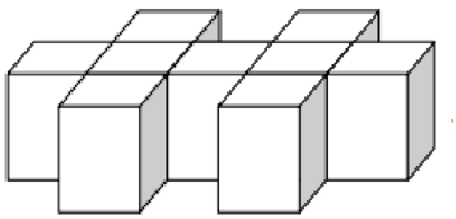
B. zwiększyła się o 20%,

C. zmniejszyła się o 20%,

D. nie zmieniła się.

Zadanie 11

Z dziewięciu jednakowych sześcianów sklejono figurę (patrz rysunek), której objętość jest równa 72.



Dokończ zdanie. Wybierz właściwą odpowiedź spośród podanych.

Pole powierzchni tej bryły jest równe.

A. 152

B. 160

C. 168

D. 184

E. 216

Odpowiedzi
Odpowiedzi do zadań zamkniętych

Zadanie1
C

Skoro mamy 6 kolumn, a każda ma 4 ściany boczne, to razem mamy do pomalowania 24 prostokąty o wymiarach 0,3m i 3,5m. Pole wynosi: $24 \cdot 0{,}3m \cdot 3.5m = 25{,}2m^2$. Skoro 2litry farby wystarczają na pomalowanie 14m^2 powierzchni, to jednym litrem pomalujemy 7m^2 powierzchni. Z tego wynika, że na pomalowanie 25,2m^2 powierzchni potrzeba 3,6 litra farby (25,2 : 7 = 3,6).

Zadanie 2
B

Objętość ziemi w donicy wynosi litrów $V = 3dm \cdot 3dm \cdot 2dm = 18dm^3 = 18l$

Zadanie 3
A

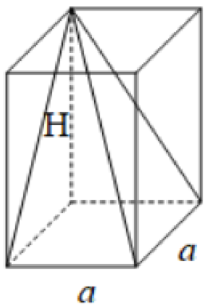
Kwadrat o boku 12 cm ma przekątną równa $12\sqrt{2}$ cm.
Krawędź sześcianu ma długość równą tej przekątnej, czyli suma wszystkich 12 krawędzi tego sześcianu wynosi $12 \cdot 12\sqrt{2} = 144\sqrt{2}$cm

Zadanie 4
FP

Pierwsze zdanie jest fałszywe - czworościan foremny ma sześć krawędzi, czyli suma $6 \cdot 6 = 36cm$.
Drugie zdanie jest prawdziwe – powierzchnia składa się z czterech trójkątów równobocznych, czyli

$$P = 4 \cdot \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 36\sqrt{3}cm^2$$

Zadanie 5
A



Objętość otrzymanego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego stanowi $\frac{1}{3}$ objętość graniastosłupa o takiej samej podstawie i wysokości. Pozostała po wycięciu ostrosłupa część klocka stanowi zatem $\frac{2}{3}$ całego klocka.

Zadanie 6
FF

Pierwsze zdanie jest fałszywe - stosujemy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy długości nieznanych odcinków
$5^2 + x^2 = (\sqrt{61})^2$, czyli x = 6
$10^2 + 6^2 = y^2$, czyli y =$\sqrt{136}$ =$2\sqrt{34}$
$10^2 + 5^2 = z^2$, czyli y = $\sqrt{125}$ =$5\sqrt{5}$

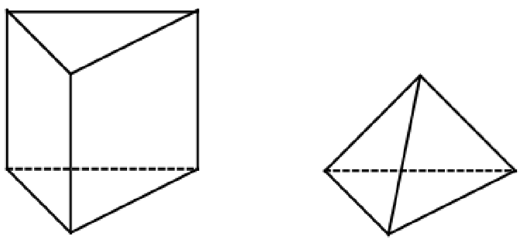
Drugie zdanie jest fałszywe – obwód wynosi $4 \cdot 5 + 4 \cdot 6 + 4 \cdot 10 = 84$

Zadanie 7
PP

Pierwsze zdanie jest prawdziwe - podstawą graniastosłupa jest trójkąt prostokątny, którego przeciwprostokątna ma długość 5cm, a jedna z przyprostokątnych ma 4cm. Z twierdzenia Pitagorasa wynika, że druga przyprostokątna ma długość 3cm. Pole podstawy wynosi zatem:
$P_p = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 4 = 6cm^2$
Po zastosowaniu wzoru na objętość $V = P_p H$ otrzymujemy, że $H = 6$cm
Drugie zdanie jest prawdziwe - pole powierzchni całkowitej tego graniastosłupa to suma pól trzech prostokątów i dwóch trójkątów prostokątnych
$P = 6 \cdot 3 + 6 \cdot 4 + 6 \cdot 5 + 2 \cdot 6 = 84cm^2$

Zadanie 8
FP

Pierwsze zdanie jest fałszywe - przedstawiony wielościan ma 12 równych krawędzi, czyli długość jednej wynosi 8 cm $(96 : 12 = 8)$.
Drugie zdanie jest prawdziwe- wielościan powstał w wyniku złożenia graniastosłupa prawidłowego trójkątnego i czworościanu foremnego.



Zadanie 9
C

Powierzchnia wielościanu składa się z 3 kwadratów i 4 trójkątów równobocznych, czyli
$P = 3 \cdot 8^2 + 4 \cdot \frac{8^2\sqrt{3}}{4} = 192 + 64\sqrt{3}[\text{cm}^2]$.

Zadanie 10
C

Jeżeli przez *a* oznaczymy początkową długość krawędzi sześcianu, to jego objętość wynosi $V_1 = a^3$.
Po zmianie długości krawędzi otrzymujemy prostopadłościan o wymiarach *0,8a* x *0,8a x 1,25a.* Jego objętość jest równa $V_2 = 0{,}8a \cdot 0{,}8a \cdot 1{,}25a = 0{,}8a^3 = 80\%a^3$.
Objętość tego pudełka zmniejszyła się o 20%.

Zadanie 11
A

$72 : 9 = 8$ objętość jednego sześcianu.
Zatem krawędź sześcianu wynosi 2. Pole jednej ściany $2 \cdot 2 = 4$
$Pbryły = 38 \cdot 4 = 152$

Odpowiedzi do zadań otwartych

Szkoła podstawowa klasa 6

Zadanie 6.1

Obliczenie pola brzegu na zewnątrz ramki:

$P_1 = 4 \cdot 35 \cdot 2 = 280\ [cm^2]$

Obliczenie pola brzegu wewnątrz ramki:

$P_2 = 4 \cdot 25 \cdot 2 = 200\ [cm^2]$

Obliczenie ramki z obu stron:

$P_3 = 8 \cdot 5 \cdot 30 = 1200\ [cm^2]$

Obliczenie pola całkowitego ramki

$P_c = P_1 + P_2 + P_3 = 280 + 200 + 1200 = 1680\ [cm^2]$

Zadanie 6.2

$L_s = 72\ cm$

$a_s = 72\ cm : 12 = 6\ cm$

$h_p = 72\ cm : 4 = 18\ cm$

$V_s = 6\ cm \cdot 6\ cm \cdot 6\ cm = 216 cm^3$

$V_s = V_p$

$V_p = a \cdot b \cdot h_p$

$216 cm^3 = a \cdot b \cdot 18\ cm\ /: 18 cm$

$12 cm^2 = a \cdot b$

a i b mają być kolejnymi liczbami naturalnymi, zatem:

a = 3 cm

b = 4 cm.

Odp. Wymiary prostopadłościanu to: 3cm x 4cm x 18cm. Krawędź sześcianu ma długość 6cm.

Zadanie 6.3

a) $V_m = 20\ m \cdot 12\ m \cdot 3\ m = 720\ m^3$

$V_s = 1{,}4\ m \cdot 0{,}4\ m \cdot 1{,}6\ m = 0{,}896 m^3$

$V_k = 0{,}768\ m^3$

$V_{sz} = 0{,}8\ m \cdot 0{,}5\ m \cdot 0{,}9\ m = 0{,}36\ m^3$

$V_t = 12V_s + 18V_k + 15V_{sz} = 12 \cdot 0{,}896 m^3 + 18 \cdot 0{,}768\ m^3 + 15 \cdot 0{,}36\ m^3 = 10{,}752 m^3 + 13{,}824\ m^3 + 5{,}4\ m^3 = 29{,}976 m^3$

Odp. Objętość magazynu zmniejszyła się o 29,976 m^3.

b)

$720\ m^3 - \left(\frac{2}{5} \cdot 720\ m^3 + 29{,}976\ m^3\right) = 720 m^3 - (288\ m^3 + 29{,}976\ m^3) = 720\ m^3 - 317{,}976 m^3 = 402{,}024\ m^3$

$\frac{402,024}{720} \cdot 100\% = 55,83(6)\%$

Odp. Nie zostało wykorzystane około 56% objętości magazynu.

Zadanie 6.4

$P_p = 6\ cm \cdot 4\ cm = 24\ cm^2$

$P_b = 1,4 \cdot 24\ cm^2 = 33,6\ cm^2$

$P_c = 24\ cm^2 + 33,6\ cm^2 = 57,6\ cm^2$

Odp. Pole powierzchni całkowitej ostrosłupa wynosi 57,6 cm^2.

Szkoła podstawowa klasa 8

Zadanie 8.1
W podstawie znajduje się trójkąt prostokątny równoramienny, którego przeciwprostokątna wynosi 6 dm. Zatem korzystając z wzoru na długość przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego równoramiennego mamy:

$a\sqrt{2} = 6$

$a = 3\sqrt{2} \quad H = 4$

$Pp = (3\sqrt{2} \cdot 3\sqrt{2}) : 2 = 9$

$V = Pp \cdot H \quad V = 9 \cdot 4 = 36$

$Pc = 2Pp + Pb$

$Pb = 6 \cdot 4 + 2 \cdot 3\sqrt{2} \cdot 4 = 24 + 24\sqrt{2}$

$Pc = 2 \cdot 9 + 24 + 24\sqrt{2} = 42 + 24\sqrt{2}$

Odp. Objętość graniastosłupa wynosi 36 dm^3, pole powierzchni całkowitej wynosi $(24 + 42\sqrt{2})dm^2$

Zadanie 8.2
P_p - pole podstawy;

P_b -pole powierzchni bocznej;

$P_ś$ – pole ściany bocznej;

a - krawędź podstawy ostrosłupa.

$P_b = 2P_p$

$P_b + P_p = 192$

$3P_p = 192 / :3$

$P_p = 64\ cm^2$

$P_b = 128\ cm^2$

$a = 8\ cm$

$P_ś = 32\ cm^2$

$(8\ cm \cdot h) : 2 = 32\ cm^2$

$h = 8\ cm$

Odp. Wysokość ściany bocznej ostrosłupa wynosi 8 cm.

Zadanie 8.3
Pole ściany bocznej =81

Pole ściany bocznej =a^2,

a^2 =81

a =9cm

H = a = 9cm

V = Pp *H

Pc = 2Pp +Pb

$\text{Pp} = 6 \cdot \frac{a^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 6 \cdot \frac{9^2 \cdot \sqrt{3}}{4} = 3 \cdot \frac{81 \cdot \sqrt{3}}{2} = \frac{243 \cdot \sqrt{3}}{2}$

$V = \frac{243 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 9 = \frac{2187 \cdot \sqrt{3}}{2}\ \text{cm}^3$

$\text{Pc} = 2 \cdot \frac{243 \cdot \sqrt{3}}{2} + 6 \cdot 81 = (243\sqrt{3} + 486)\ \text{cm}^2$.

Zadanie 8.4

Rozwiązanie:
a, b, c – długość, szerokość, wysokość parteru
V_1 – objętość (kubatura) parteru budynku
h – wysokość poddasza
V_2 – objętość (kubatura) poddasza
V – objętość całego budynku

$$V_1 = a \cdot b \cdot c$$
$$V_1 = 14m \cdot 9{,}5\ m \cdot 3{,}2\ m = 425{,}6\ m^3$$

$$V_2 = P_P \cdot h$$
$$P_P = \frac{a \cdot h}{2} = \frac{9{,}5 \cdot 2{,}8}{2} = 13{,}3\ m^2$$

$$V_2 = 13{,}3\ m^2 \cdot 14\ m = 186{,}2\ m^3$$

$$V = 425{,}6\ m^3 + 186{,}2\ m^3 = 611{,}8\ m^3$$

Odp. Kubatura budynku wynosi 611,8 m^3

Zadanie 8.5

Zauważmy, że krawędź AB jest prostopadła do AD i do DW (bo jest równoległa do DC). To oznacza, że krawędź AB jest prostopadła do płaszczyzny ADW. Jest więc prostopadła do każdej prostej zawartej w tej płaszczyźnie, w szczególności trójkąt ABW jest prostokątny. Analogicznie wykazujemy, że trójkąt BCW jest prostokątny. Mamy więc

$$AB = \sqrt{BW^2 - AW^2} = \sqrt{81 - 36} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$
$$BC = \sqrt{BW^2 - CW^2} = \sqrt{81 - 49} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$$
$$DW = \sqrt{AW^2 - AD^2} = \sqrt{36 - 32} = 2.$$

Objętość ostrosłupa jest więc równa

$$V = \frac{1}{3} \cdot AB \cdot BC \cdot DW = \frac{1}{3} \cdot 3\sqrt{5} \cdot 4\sqrt{2} \cdot 2 = 8\sqrt{10}.$$

Zadanie 8.6

a, b, c – długości krawędzi prostopadłościanu
4a + 4b + 4c =60 /:4
a + b + c = 15
średnia arytmetyczna: 15 : 3 = 5 co należało udowodnić.

Zadanie 8.7

Podstawą graniastosłupa prawidłowego czworokątnego jest kwadrat.
Punkty K, L, M, N to wierzchołki kwadratu (podstawa ostrosłupa P_{Po}) o polu dwa razy mniejszym niż pole kwadratu, który jest podstawą graniastosłupa (P_{Pg}), stąd:

$P_{Po} = P_{Pg} : 2 = \frac{1}{2} P_{Pg}$

Wysokość ostrosłupa jest równa wysokości graniastosłupa (H)

$$V_g = P_{Pg} \cdot H$$

$$V_o = \frac{1}{3} \cdot P_{Po} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot P_{Pg} \cdot H = \frac{1}{6} \cdot V_g$$

$$V_o = \frac{1}{6} \cdot V_g$$

Zadanie 8.8

I - graniastosłup o podstawie rombu

II - graniastosłup o podstawie trójkąta

Skoro $V_I = V_{II}$ to niższy graniastosłup to ten, który ma większą podstawę.

Z Δ prostokątnego o kątach 30° i 60° w rombie:

$2b = 3$

$b = 1{,}5 = \frac{1}{2}d_1$

$b\sqrt{3} = 1{,}5\sqrt{3} = \frac{1}{2}d_2$

czyli przekątne $d_1 = 3$, $d_2 = 3\sqrt{3}$ $P_{PI} = \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 3\sqrt{3} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$

$V_I = \frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot H_I$

$a = 6$ cm

$P_{PII} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{6^2\sqrt{3}}{4} = \frac{36\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}$ - graniastosłup o większej podstawie ma niższą wysokość $H_{II} = 12$ cm

$V_I = V_{II}$

$\frac{9\sqrt{3}}{2} \cdot H_I = 9\sqrt{3} \cdot 12$

$H_I = 24$ cm

Zadanie 8.9

Długości krawędzi: *a, b, g*.
$a = 3$, $b = 3\sqrt{2}$, $g = 3$
Obliczenie długości krawędzi *c*
$c^2 = 2^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2$
$c^2 = 4 + 18$
$c = \sqrt{22}$

Obliczenie długości krawędzi e

$e^2 = \left(\sqrt{22}\right)^2 - 3^2$

$e^2 = 22 - 9$

$e = \sqrt{13}$

Obliczenie długości wszystkich krawędzi

$2 \cdot 3 + 2 \cdot 2 + 3\sqrt{2} + \sqrt{22} + \sqrt{13} + 3 = 13 + 3\sqrt{2} + \sqrt{22} + \sqrt{13}$

Zadanie 8.10

$P_c = 36\sqrt{3}$

$P_b = 27\sqrt{3}h$

$P_p = 36\sqrt{3} - 27\sqrt{3} = 9\sqrt{3}$

$\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 9\sqrt{3}a$

$a^2 = 36$

$a = 6$

$P_b = 27\sqrt{3}$

$3 \cdot \frac{6 \cdot h}{2} = 27\sqrt{3}$

$h = 3\sqrt{3}$

$\left(3\sqrt{3}\right)^2 + 3^2 = b^2$

$b = 6$

Odp. Krawędź boczna ma długość 6cm.

Zadanie 8.11

V kostki=10^3cm^3

x – o ile cm podniesie się poziom wody

60·25·x=1000 /:1500

x=$\frac{2}{3}$cm≈0,7cm

Odp. Poziom wody podniesie się o około 0,7cm.

Zadanie 8.12

P_b=8·6·0,5·4=96m^2

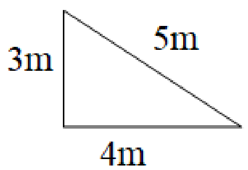
96:10=9,6 l

Odp. Zużyjemy 9,6 litra farby.

Zadanie 8.13

h – wysokość ściany bocznej

Z twierdzenia Pitagorasa



$Pb = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot 8 \cdot 5 = 80m^2$

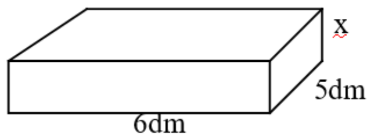
$80 \cdot 0{,}03 + 80 = 82{,}4\text{m}^2$

$250\text{zł} \cdot 82{,}4 = 20600\text{zł}$

Odp. Koszt zakupu blachy na pokrycie dachu wynosi 20600 zł.

Zadanie 8.14

Ponieważ $750ml = \frac{3}{4}l$, to objętość wody wlanej do akwarium z 8 butelek wynosi $8 \cdot \frac{3}{4}l = 6l = 6dm^3$.



Jednocześnie można stwierdzić, że objętość wlanej wody jest równa objętości prostopadłościanu o długości 6dm, szerokości 5dm i wysokości *x*.

$6dm \cdot 5dm \cdot x = 6dm^3$

Zatem $x = 0{,}2dm = 2cm$.

Uwaga!

Do rozwiązania zadania tym sposobem nie była nam potrzebna wysokość akwarium, ani informacja o tym, że jest ono napełnione wodą do połowy.

Odp. Poziom wody w akwarium podniesie się o 2cm.

Zadanie 8.15

Niech a oraz b oznaczają długości krawędzi podstawy, H wysokość prostopadłościanu, natomiast x długość jednostkowego odcinka. Mamy wtedy: a = 1x, b = 2x, H = 4x. Układamy twierdzenie Pitagorasa i obliczamy najpierw długość jednostkowego odcinka.

$x^2 + (2x)^2 = (5\sqrt{5})^2$

$x^2 + 4x^2 = 125$, czyli $x = 5$.

Długości krawędzi podstawy wynoszą zatem 5 i 10, a wysokość graniastosłupa jest równa 20.

Zadanie 8.16

Z treści zadania wynika, że $P_p = 0{,}6P_b$.

Ze wzoru na pole powierzchni $0{,}6P_b + P_b = 96$, czyli $1{,}6P_b = 96$. Stąd $P_b = 60\text{cm}^2$.

Pole podstawy wynosi zatem $P_p = 0{,}6 \cdot 60 = 36$ cm^2.

Ponieważ podstawa jest kwadratem, to długość krawędzi podstawy jest równa 6cm.

Pole powierzchni bocznej ostrosłupa składa się z czterech jednakowych trójkątów równoramiennych polu $P = 60 : 4 = 15$ cm^2 i krawędzi podstawy 6cm.

Ze wzoru na pole trójkąta obliczamy jego wysokość $\frac{6 \cdot h}{2} = 15$. Po wykonaniu przekształceń $h = 5$cm.

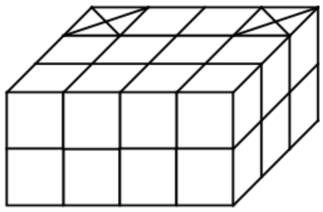
Odpowiedź: Długość wysokości ściany bocznej wynosi 5 cm.

Zadanie 8.17

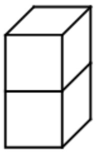
Długość krawędzi sześcianu jest równa 2 cm (8 cm : 4 = 2cm).

Aby obliczyć pole powierzchni całkowitej bryły wystarczy policzyć ilość kwadratów o boku 2 cm składających się na tą powierzchnię.

Pole powierzchni prostopadłościanu składa się z 50 kwadratów o boku 2cm (12 + 10 + 8 + 8 + 6 + 6 = 50).



Powierzchnia jednej kolumny składa się z 9 kwadratów o boku 2cm ($2 + 2 + 2 + 2 + 1 = 9$), czyli 2 kolumny składają się z 18 kwadratów

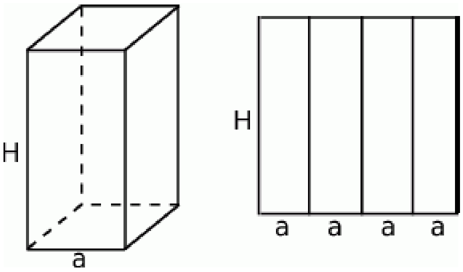


Powierzchnia całej bryły składa się zatem z 68 kwadratów o boku 2 cm.. Stąd pole powierzchni całkowitej bryły wynosi $68 \cdot 2^2 = 272cm^2$.
Bryła składa się z 28 małych sześcianów (12 w dolnej warstwie, 12 w warstwie górnej i 4 w dwóch kolumnach).
Ponieważ objętość jednego sześcianu wynosi $2^3 = 8$, to bryła ma objętość $28 \cdot 8 = 224cm^3$.
Odpowiedź: Pole powierzchni bryły wynosi 272 cm^2, a objętość 224 cm^3.

Szkoły Ponadpodstawowe

Zadanie 1

Wykonujemy rysunek pomocniczy



Z treści zadania wynika, że skoro powierzchnia boczna jest kwadratem, to

$H^2=400$, czyli $H=20$,

wysokość graniastosłupa jest 4 razy większa od krawędzi podstawy

$H=4a$, wobec tego $4a=20$ $a=5$.

Obliczymy objętość i pole powierzchni bryły

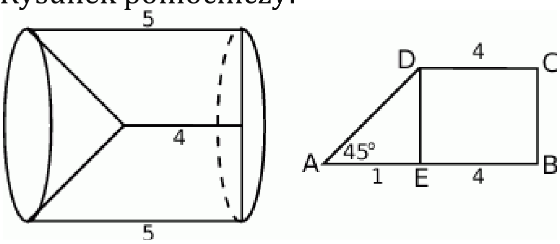
$V=P_pH=5^2\cdot 20=500$

$P_c=2P_p+P_b=2\cdot 52+400=450$

Odp. Objętość $500\ \mathrm{cm}^3$, pole powierzchni: $450\ \mathrm{cm}^2$

Zadanie 2

Rysunek pomocniczy:



Jeżeli naszkicujemy sobie opisaną sytuację, to widać, że po obrocie otrzymamy walec z wyciętym stożkiem.

Najpierw wyznaczamy wysokość trapezu.

Zauważamy, że trójkąt AED jest równoramienny, zatem $DE = AE = AB - DC = 1$.

W takim razie objętość całego walca to $V_w = \pi r^2 \cdot H = \pi \cdot 1^2 \cdot 5 = 5\pi$.

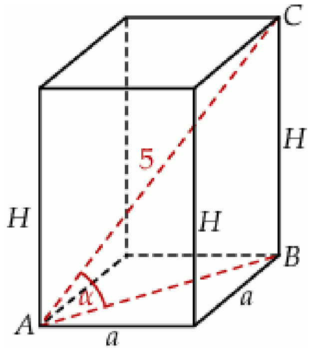
Od tej objętości trzeba odjąć objętość wyciętego stożka, czyli

$$V = 5\pi - \frac{1}{3}\pi \cdot 1^2 \cdot 1 = \frac{14}{3}\pi.$$

Odp. Objętość otrzymanej bryły to $\frac{14}{3}\pi$

Zadanie 3

Rozpoczynamy od rysunku.



Na podstawie rysunku widać, że

$$\frac{BC}{AC} = \sin\alpha$$
$$\frac{H}{5} = \frac{1}{5} \quad \Rightarrow \quad H = 1.$$

Korzystamy z twierdzenia Pitagorasa w trójkącie prostokątnym ABC.

$$AB = \sqrt{AC^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 - 1} = \sqrt{25 - 1} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}.$$

AB jest przekątną podstawy (kwadratu), stąd

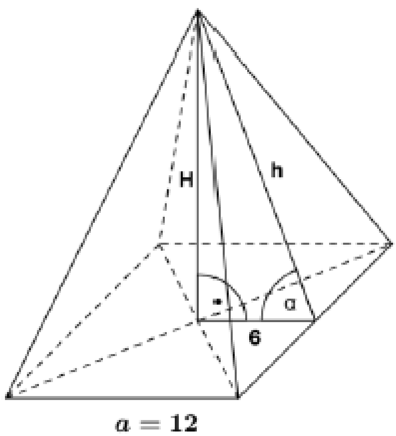
$$a\sqrt{2} = 2\sqrt{6} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{3}$$

i objętość graniastosłupa jest równa

$$V = a^2 \cdot H = 12 \cdot 1 = 12.$$

Odp. Objętość wynosi 12

Zadanie 4



$$\frac{H}{6} = tg\alpha = tg30^o = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$H = 2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 12^2 \cdot 2\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

$$\frac{6}{h} = cos\alpha = cos30^o = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$h = 4\sqrt{3}$$

$$P_b = 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot a \cdot h = 2 \cdot 12 \cdot 4\sqrt{3} = 96\sqrt{3}$$

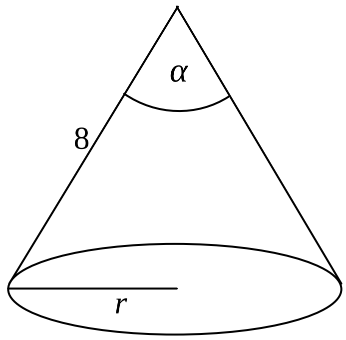
Odp. Objętość ostrosłupa i pole powierzchni bocznej wynosi $96\sqrt{3}$

Zadanie 5

Wprowadzamy oznaczenia jak na rysunku:

r — promień podstawy stożka,

α — kąt rozwarcia stożka.



Z warunków zadania otrzymujemy równanie

$P_C = \pi r(r+8) = 48\pi,$

$r(r+8) = 48,$

$r^2 + 8r - 48 = 0, gdzie\ r \in (0,8)$

$\Delta = 64 + 192 = 256, \sqrt{\Delta} = 16$

$r_1 = \frac{-8+16}{2} = 4,\ r_2 = -12$

drugie rozwiązanie odrzucamy, bo nie spełnia warunków zadania.

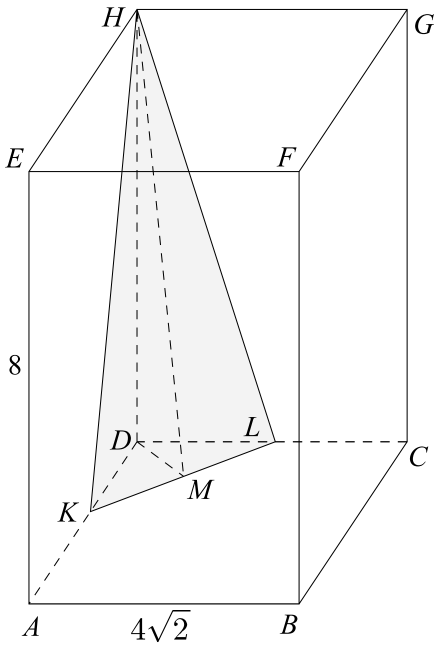
Przekrój osiowy stożka jest trójkątem, w którym wszystkie boki mają taką samą długość 8. Jest to trójkąt równoboczny, więc $\alpha = 60°$.

Wysokość stożka jest równa

$h = \frac{8\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}$

$V = \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 4^2 \cdot \frac{8\sqrt{3}}{2} = \frac{64\pi\sqrt{3}}{3}$

Zadanie 6



Oznaczmy przez K i L środki odpowiednich krawędzi. Niech M będzie środkiem odcinka KL.

Zauważmy, że figurą otrzymaną w przekroju jest trójkąt równoramienny. Jego pole jest równe

$$P = \frac{1}{2}|KL| \cdot |MH|.$$

Wyznaczmy długości odcinków KL oraz MH.

Odcinek KL jest połową przekątnej kwadratu o boku $4\sqrt{2}$.

Tak więc $|KL| = \frac{1}{2} \cdot 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 4$.

Odcinek MH jest przeciwprostokątną w trójkącie prostokątnym DMH o przyprostokątnych długości $|DH| = 8$ $|DM| = |MK| = \frac{1}{2}|KL| = 2$ oraz kącie prostym MDH (gdzie MDH jest kątem między krawędzią boczną i płaszczyzną podstawy w danym graniastosłupie).

$$|MH| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68} = 2\sqrt{17}$$

Pole przekroju jest więc równe: $P = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2\sqrt{17} = 4\sqrt{17}$.

Zadanie 7

promień $_{kuli}$ $= R = 10 \text{ cm} : 2 = 5 \text{ cm}$

$V_{kuli} = \frac{4}{3}\pi R^3$

$V_{kuli} = \frac{4}{3}\pi 5^3$

$V_{kuli} = \frac{4}{3}\pi 125$

$V_{kuli} = \frac{500}{3}\pi \text{ cm}^3$

$V_{walca} = \pi r^2 H$

$V_{walca} = \pi 1^2 \cdot 4$

$V_{walca} = 4\pi \text{ cm}^3$

Ilość ciastek: $\frac{500}{3}\pi : 4\pi = \frac{500}{12} = 41,(6) \approx 41$ ciastek

Odp. Pani Kowalska upiekła 41 ciastek i nie wykorzystała całego ciasta.

Zadanie 8

Dane:

a=20 cm

H= 40 cm

$P_p = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$

$P_p = 6 \cdot \frac{20^2\sqrt{3}}{4}$

$P_p = 600\sqrt{3} \text{ cm}^2$

$P_b = 6aH$

$P_b = 6 \cdot 20 \cdot 40$

$P_b = 4800 \text{ cm}^2$

Odp. Pole zewnętrznej powierzchni akwarium: $600\sqrt{3} + 4800 \text{ cm}^2$.

Zadanie 9

$P_b = 2 \cdot \pi \cdot 1 \cdot 2,5 = 5\pi \text{ m}^2$

$200 \cdot 5\pi = 1000\pi \approx 1000 \cdot 3,14 = 3140 \text{m}^2$

Odp. Walec utwardzi 3140 m^2

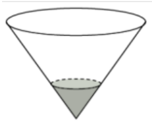
Zadanie 10

$V = \frac{1}{3}\pi \cdot 3^2 \cdot 10 = 30 \cdot 3,14 = 94,2 \text{cm}^3$

$94,2 \cdot 8,5 = 800,7 \text{ g} \approx 800 \text{ g}$

Odp. Masa stożka wynosi około 800 g.

Zadanie 11



$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = 15\text{ml}$$

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}r\right)^2 \cdot \frac{1}{2}h = \frac{1}{8}\cdot\frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{1}{8}\cdot 15 = 1{,}875\ ml$$

tyle zostaje w kieliszku

Bartek jednorazowo wypija 15- 1,875 =13.125 ml

Dziennie 3·13,125 = 39,375 ml

Odp. Lek pomoże Bartkowi.

Zadanie 12

$x^3 - 12x^2 + 44x - 48 = 0$

$(x-2)(x-4)(x-6) = 0$

$x_1 = 2$

$x_2 = 4$

$x_3 = 6$

a) $V = 2\cdot 4\cdot 6 = 48\ j^3$
   $P_C = 2\cdot 2\cdot 4 + 2\cdot 4\cdot 6 + 2\cdot 6\cdot 2 = 16 + 48 + 24 = 88\ j^2$

b) $d = \sqrt{2^2 + 4^2 + 6^2} = \sqrt{56} = 2\sqrt{14}\ j$

c) P –pole przekroju
   p – długość przekątnej ściany prostopadłościanu o wymiarach 4 j x 6 j

$p = \sqrt{4^2 + 6^2} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13}$

$P = 2\cdot 2\sqrt{13} = 4\sqrt{13} j^2$

d) $V_{sześcianu} = 1{,}5^3 = 3{,}375\ j^3$
   $V_{bryły} = 48 - 3{,}375 = 44{,}625\ j^3$
   $P_C = 88\ j^2$

Zadanie 13

$log_6(x+1) + log_6(2x+1) > 1$

$D: x > 0$

$log_6[(x+1)(2x+1)] > 1$

$log_6[(x+1)(2x+1)] > log_6 6$

$(x+1)(2x+1) > 6$

$2x^2 + 3x - 5 > 0$

$x \in (-\infty; -2\frac{1}{2}) \cup (1; +\infty)$

Zatem x=2

$P_C = 2^2 \cdot \sqrt{3} = 4\sqrt{3} j^2$

$$V = \frac{2^3 \cdot \sqrt{2}}{12} = \frac{2\sqrt{2}}{3} j^3$$

Zadanie 14

Każdą warstwę w czworościanie kul stanowią liczby trójkątne (1, 3, 6 itd.). Zarówno liczby trójkątne, jak i czworokątne znajdują się na trójkącie Pascala.
Tabela ukazuje wartości dla początkowych warstw.

n (wysokość)	Liczba trójkątna (ilość kul w warstwie)	Liczba czworokątna (całkowita ilość kul)
1	1	1
2	3	4
3	6	10
4	10	20
5	15	35
6	21	56